

# 湮没在色噪声背景下 微弱方波信号的混沌检测方法

李 月<sup>1</sup>,石要武<sup>1</sup>,马海涛<sup>1</sup>,杨宝骏<sup>2</sup>

(1. 吉林大学通信工程学院信息工程系,吉林长春 130012;2. 吉林大学地球探测科学与技术学院地球物理系,吉林长春 130026)

**摘 要:** 建立一个其动力学行为对微弱方波信号极其敏感的混沌系统,根据该系统相轨迹的变化实现了任意色噪声背景下的微弱方波信号的测量.文中论证了方波信号的检测方法;分析了噪声对混沌检测的影响,仿真实验表明该混沌检测系统对方波信号非常敏感,对任何零均值色噪声均具有极强的抑制能力.

**关键词:** Duffing 方程;混沌振子;信号检测

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0087-04

## Chaotic Detection Method for Weak Square Wave Signal Submerged in Colored Noise

LI Yue<sup>1</sup>,SHI Yao-wu<sup>1</sup>,MA Hai-tao<sup>1</sup>,YANG Bao-jun<sup>2</sup>

(1. Dept. of Information Engineering, College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China;

2. Dept. of geophysics, College of Geor Exploration Sciences and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China)

**Abstract:** We build a chaotic system which dynamic behavior is very sensitive to weak square wave signal, and then use the change of phase space track of this system to realize detection of the weak square wave signal from any colored noise background. In this paper, we proved the square wave signal's detection method and analyzed the influence for the chaotic detection from noise. The simulation experiments shows that chaotic detection system is very sensitive to square wave signal and have strong restrain ability to any colored noise with zero mean.

**Key words:** duffing equation; chaotic oscillator; signal detection

### 1 引言

任意色噪声背景下极低信噪比信号测量是微弱信号检测领域里的尖端问题之一.长期以来,人们一直向着这一目标进行着不懈的探索和努力,并已取得了许多重大进展<sup>[1,2]</sup>.对于相互独立的任意噪声,可采用现代互谱估计的方法<sup>[3]</sup>加以抑制.对于高斯色噪声背景下的非高斯信号测量,可以使用高阶累积量方法,其信噪比工作下限已达到了 -20dB 的水平<sup>[4~6]</sup>,而互高阶累积量方法,则可进一步抑制相互独立的任意色噪声和相关的高斯色噪声<sup>[7]</sup>.近年来迅速发展起来的信号的混沌检测方法对噪声抑制范围和信噪比工作下限又有了新的突破. Hayqin<sup>[8,9]</sup>等利用神经网络和混沌检测系统结合的方法研究了在海洋杂波背景下(被证明为混沌噪声)的小目标信号提取; Short<sup>[10]</sup>等人研究了混沌噪声背景下的通讯中信号的提取问题,均取得了良好结果,类似的文章还有许多<sup>[11,12]</sup>.我国学者王冠宇等人则利用混沌测量系统实现了白噪声背景下信噪比低达 -66dB 的正弦信号测量<sup>[13]</sup>,聂春艳等人对此又

做了进一步的研究<sup>[14]</sup>.然而,这些方法存在的一个共同问题是对背景噪声的类型加以某种形式的限定,这必然限制了这些方法的应用范围.

微弱方波信号是信号检测中的一个常见典型信号.本文所提出的混沌检测方法,首次实现了任意色噪声背景下的微弱方波信号的测量.仿真实验结果表明,在任意色噪声背景下,对于信噪比很低的微弱信号,该方法仍具有良好的检测性能.本文方法对于畸变的方波信号测量也有相当的适应能力.

### 2 方波信号的混沌检测方法

混沌系统最显著的特征之一是对初始条件的极度敏感性.利用这一特性,确定一个其动力学行为对方波信号敏感的混沌系统作为检测系统,将微弱被测方波信号引入,则该系统状态立刻发生由初始的混沌运动状态到大尺度周期运动状态的明显变化,由于这种动力学行为的变化完全是由被测方波信号引起的,从而可将微弱方波信号从强背景噪声中检测出来.

收稿日期:2002-09-23;修回日期:2003-08-20

基金项目:国家自然科学基金(No. 40374045);吉林省科技发展计划资助项目(No. 20020626)

考虑下述单位方波信号

$$s(t) = \left[ U(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} u(t - iT) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} U \left( t - \frac{(2i-1)T}{2} \right) \right] \quad (1)$$

式中,  $U(t)$  为单位阶跃函数,  $T$  为方波信号周期

将  $A_s(t)$  作为负刚性 Home 型 Duffing 方程<sup>[15]</sup>的激励项得方波信号混沌检测模型:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + (-x + x^3) = A_s(t) \quad (2)$$

式中  $\mu$  为阻尼比,  $s(t)$  作为系统周期策动力,  $A$  为单位方波信号  $s(t)$  的幅值,  $(-x + x^3)$  为非线性恢复力,  $\mu$  为实数因子.

在  $\mu$  固定的情况下, 系统状态随  $s(t)$  的幅值  $A$  的变化而变化, 我们应用梅尔尼科夫函数可以证明该系统固有的混沌区域, 同时找出系统的混沌临界阈值  $A_d$ .

方程 (2) 的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu y + A_s(t) \end{cases} \quad (3)$$

当  $\mu = 0$  时, 方程 (2) 为哈密顿系统, 其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \quad (4)$$

当  $\mu = 0$  且  $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$  时, 可解得该方程的三个不动点为  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .

系统的特征方程为:  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ,  $(5)$

当不动点为  $(0, 0)$  时,  $\lambda^2 = 1$ , 即  $\lambda = \pm 1$ , 所以  $(0, 0)$  为鞍点. 当不动点为  $(\pm 1, 0)$  时,  $\lambda^2 = -2$ , 即  $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ ,  $(\pm 1, 0)$  为中心, 可见存在两条连结双曲鞍点  $(0, 0)$  的同宿轨道.

下面求该同宿轨道  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 = 0 \end{cases}$

由于  $y^2 = x^2 - \frac{1}{2} x^4 = x^2(1 - \frac{1}{2} x^2)$

所以  $y = x \sqrt{1 - \frac{1}{2} x^2} = x \sqrt{\frac{2-x^2}{2}} = x \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$

由  $\dot{x} = y$  得:  $\frac{dx}{dt} = \frac{x \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$

解得同宿轨道的表达式为:

$$\begin{cases} x_0(t) = \pm\sqrt{2} \sec ht \\ y_0(t) = \mp\sqrt{2} \sec ht \cdot tht \end{cases} \quad (6)$$

根据式 (3) 令:

$$f(x) = \begin{pmatrix} y \\ -x + x^3 \end{pmatrix}; g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu y + s(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

则梅尔尼科夫函数为<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+T} f(q_0(t)) \cdot g(q_0(t), t+t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \{ y(t) \cdot [-\mu y(t) + A_s(t)] \} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} -\mu (\mp\sqrt{2} \sec ht \cdot tht)^2 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T} \{ (\mp\sqrt{2} \sec ht \cdot tht) \cdot s(t) \} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{3} \mu \pm 2\sqrt{2} A \left[ \frac{1}{2} \sec ht_0 \pm \sum_{i=1}^{\infty} \sec h(t_0 + iT) \mp \sum_{i=1}^{\infty} \sec h \left( t_0 + \frac{2i-1}{2} \right) \right] \quad (8)$$

令  $M(t_0) = 0$  得

$$\frac{4}{3} \mu = \pm 2\sqrt{2} A_c \left[ \frac{1}{2} \sec ht_0 \pm \sum_{i=1}^{\infty} \sec h(t_0 + iT) \mp \sum_{i=1}^{\infty} \sec h \left( t_0 + \frac{2i-1}{2} \right) \right] \quad (9)$$

解得:

$$\frac{A_c}{\mu} = \frac{\frac{2}{3\sqrt{2}}}{\left[ \frac{1}{2} \sec ht_0 \pm \sum_{i=1}^{\infty} \sec h(t_0 + iT) \mp \sum_{i=1}^{\infty} \sec h \left( t_0 + \frac{2i-1}{2} \right) \right]} = R(\quad) \quad (10)$$

$R(\quad)$  为系统出现混沌的阈值. 根据梅尔尼科夫定理<sup>[16]</sup>, 此时  $M(t_0)$  一定存在与  $\mu$  无关的  $t_0$ , 使得  $M(t_0) = 0$ , 因此对于充分小的  $\mu$ , 此系统相应的庞加莱映射中, 稳定不变流形与不稳定不变流形必然相交出现横截同宿点, 所以此系统出现混沌解. 当  $\mu$  一定时, 当  $A < A_c$  时, 系统处于分岔状态, 当  $A > A_c$  时, 系统进入混沌状态, 这一过程随  $A$  的变化非常迅速.  $A$  在很大范围内, 系统都处于混沌状态. 直到大于另一阈值  $A_d$  时, 系统进入大尺度周期的运动.  $A_d$  为系统处于混沌临界状态的信号的幅值, 即该混沌系统处于混沌和大尺度周期运动状态之间的临界状态. 可通过数值解法确定  $A_d$  和  $\mu$  的关系, 实验结果证实  $\mu$  的取值范围为  $0.2 \sim 0.5$  时,  $A_d/\mu$  近似为一常数 1.5. 因此,  $\mu$  选得小些, 可减小临界混沌的信号幅值  $A_d$ , 但  $\mu$  取得过小会使系统输出轨迹变化剧烈, 不利于临界混沌状态的判别.

### 3 附加噪声对混沌检测方法的影响

前面的分析中, 在没有考虑附加噪声对测量的影响时, 系统的大尺度周期轨迹是平滑的. 事实上, 在任何测量过程中, 信号中的噪声是不可避免的, 考虑噪声的影响, 假定噪声  $n(t)$  是一种附加的未知分布的零均值平稳有色噪声, 取  $\mu = 1$ , 则式 (2) 可写为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + (-x + x^3) = A_s(t) + n(t) \quad (11)$$

用  $x(t)$  表示噪声对  $x(t)$  的小扰动, 从而得出在噪声存在的情况下系统的随机微分方程为

$$(\ddot{x} + \dot{x}) + \mu(\dot{x} + x) - (x + x^3) + (x + x^3) = A \cdot s(t) + n(t) \quad (12)$$

其中  $n(t)$  为噪声,  $E\{n(t)\} = 0$ , 式 (12) 减去式 (11) 得:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + 3x^2 \cdot x + 3x \cdot x^2 + x^3 = n(t)$$

由于  $x$  很小, 所以可以略去  $x$  的高阶无穷小, 并令  $c(t) = 1 - 3x^2$  得

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - c(t) \cdot x = n(t) \quad (13)$$

将式 (13) 写成矢量微分方程的形式

$$\dot{X}(t) = H(t) X(t) + N(t) \quad (14)$$

其中

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & -\mu \end{bmatrix}, N(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ n(t) \end{bmatrix}$$

它的解为  $X(t) = \Phi(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, u) N(u) du$

其中  $\Phi$  是系统的状态转移矩阵, 由于第一项为暂态解, 将很快衰减为零, 故只须考虑第二项, 因此得到

$$X(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, u) N(u) du \quad (15)$$

$$X(t) \text{ 的均值为: } E\{X(t)\} = \int_{t_0}^t \Phi(t, u) E\{N(u)\} du = 0 \quad (16)$$

$x(t)$  的均方差为:

$$D\{X(t)\} = E\{X(t) X^T(t)\} = \Sigma_{xx}(t, t)$$

其中  $\Sigma_{xx}(t, t)$  为输出噪声的自相关函数, 可以证明<sup>[17]</sup>

$$\Sigma_{xx}(t, t) = \Sigma_{xx}(t + nT, t + nT)$$

可见任何零均值色噪声与时间  $t$  有关, 为非平稳过程. 而且该过程是循环平衡过程, 即噪声不会对系统原有运行轨迹产生根本影响, 仅仅会使系统的运行轨迹变得粗糙些, 在理想轨迹附近波动. 注意到上述推导没有涉及到噪声分布问题, 因此该结论对任意分布的平稳零均值噪声同样适用. 即该结论与噪声的分布无关.

综上所述, 用混沌方法检测周期方波信号的步骤为:

根据信号中噪声的大小选取一个合适的阻尼比  $\mu$ , 当噪声较大时, 选取较大的  $\mu$ , 反之, 选取较小的  $\mu$ .

通过仿真实验, 确定系统的临界混沌时的信号幅值  $A_d$ .

通过调整前置放大器增益 (亦可通过先将被测信号放大到一个合适的幅值, 再通过软件乘以一个衰减系数), 使混沌测量系统处于临界混沌状态.

待测信号的幅值为  $A = A_d/K$  式中:  $K$  为信号输入通道总增益,  $A_d$  为临界混沌时的信号幅值.

### 4 仿真实验

为了有效地检测周期方波信号, 采用下述预加内置方波信号的方法, 更能充分体现出该方法检测微弱信号的物理过程.

考虑如下混沌测量系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (-\mu y + x - x^3 + A_s(t) + A_i s_i(t)) + n(t) \end{cases} \quad (17)$$

其中  $\mu$  为阻尼比,  $A_s(t)$  为系统内置方波信号 (见式 (1)), 取  $T = 1$ ,  $A_i s_i(t)$  为待测信号,  $n(t)$  为噪声, 实验时选择  $\mu = 0.5$ .

**实验 1** 周期方波信号  $A_i s_i(t)$  中混有高斯白噪声  $n(t)$

(1) 调系统的内置信号为  $A = 0.5992698$  伏时, 系统输出  $x$  及  $\dot{x}$  随时间  $t$  变化的时域波形如图 1 所示, 而  $\dot{x}$  与  $x$  的相平面轨迹如图 2 所示, 可见系统进入混沌临界状态, 此时不加入

待测信号, 只将  $n(t)$  作为高斯白噪声并入系统, 不断调大  $n(t)$  的功率, 系统仍然处于混沌状态不变 (此时高斯白噪声  $n(t)$  的功率为  $7 \times 10^{-8}$  瓦). 可见噪声虽然强烈, 但对系统状态影响不明显.

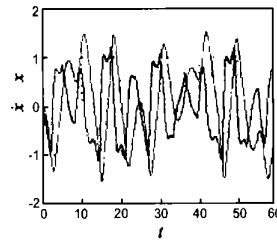


图 1  $A = 0.5992698$  系统

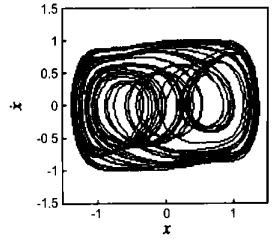


图 2

$A = 0.5992698$  系统

时域波形的相平面轨迹

(2) 加入待测周期方波信号,  $A_i s_i(t) = A_{i0} s(t)$ , 调整  $A_{i0} = 10^{-8}$ , 发现系统输出  $x$  及  $\dot{x}$  随时间  $t$  变化的时域波形呈现周期状态如图 3 所示, 相轨迹也立刻发生变化, 由混沌状态跃迁到大尺度周期运动状态, 如图 4 所示. 此时被测信号的信噪比为

$$SNR = 10 \lg \frac{(10^{-8})^2}{7 \times 10^{-8}} = -88.45 \text{ dB}$$

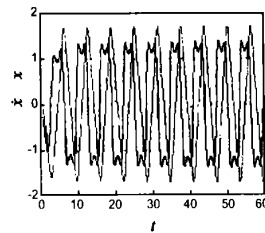


图 3  $A_{i0} = 10^{-8}$  时系统的时域波形

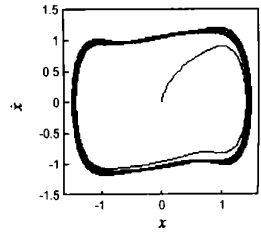


图 4  $A_{i0} = 10^{-8}$  时系统的相平面轨迹

**实验 2** 周期方波信号  $A_i s_i(t)$  中混有高斯色噪声  $n(t)$  我们用方差为 1 的高斯白噪声通过一个四阶带通滤波器产生高斯色噪声. 该滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{k(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}} \quad (18)$$

滤波器的上限截止频率为 0.2, 下限截止频率为 0.15 (均为归一化频率).

(1) 仍取系统内置方波信号幅度  $A = A_d$ , 此时系统处于混沌临界状态. 然后不加入待测信号, 仅将高斯色噪声  $n(t)$  加入系统, 调整  $k$  使噪声功率为  $7 \times 10^{-8}$  瓦, 此时系统相轨迹仍处于混沌状态不变 (系统输出时域波形及系统相轨迹类似于图 1、图 2, 故在此略).

(2) 加入被测方波信号  $A_i s_i(t)$ , 调整  $A_i = 10^{-9}$ , 系统相轨迹立刻发生变化, 由混沌状态跃迁到大尺度周期运动状态, (系统输出时域波形及系统相轨迹类似于图 3、图 4, 故在此略). 在高斯色噪声背景下, 此时被测信号的信噪比为

$$SNR = 10 \lg \frac{(10^{-9})^2}{7 \times 10^{-8}} = -108.45 \text{ dB}$$

### 实验 3 畸变的方波信号中混有非高斯色噪声

我们用方差为 1 的非高斯白噪声通过式(18)所示的四阶带通滤波器产生非高斯色噪声.

(1) 首先令系统内置方波信号幅度  $A = A_d = 0.5992698$ , 系统的相轨迹为临界混沌状态, 然后将  $n(t)$  作为非高斯色噪声并入系统(噪声功率仍为  $7 \times 10^{-8}$  瓦), 此时系统相轨迹仍处于混沌状态(系统输出时域波形及系统相轨迹类似于图 1、图 2, 故在此略).

(2) 将正弦信号作为一种畸变的方波信号检测. 即取  $A_i s_i(t) = A_i \cos(t)$ , 调整正弦信号幅值  $A_i = 10^{-6}$ , 系统立即发生相变, 由混沌状态跃迁至大尺度周期状态(系统输出时域波形及系统相轨迹类似于图 3、图 4, 故在此略). 可见此时系统检测信噪比

$$SNR = 10 \lg \frac{(10^{-6})^2}{7 \times 10^{-8}} = -48.45 \text{ dB}$$

## 5 结论

综上所述我们得出以下结论: 混沌检测是由混沌系统的瞬间相变将被噪声覆盖的微弱周期方波信号检测出来, 显示出混沌检测系统对微弱信号的极端敏感性. 混沌检测最突出的特点是对任意零均值未知分布色噪声均具有极强的抑制能力以及极低的信噪比工作下限, 这是目前现有其它信号处理方法所无法比拟的. 混沌检测所具有的普适性, 使它在微弱信号检测中具有很大潜力. 因而, 它是一种极具发展前景的检测方法.

### 参考文献:

- [ 1 ] Rao B D, Hari K V. Performance analysis of root-MUSIC[J]. IEEE Trans. on AES, 1989, 37(8): 1789 - 794.
- [ 2 ] Roy R, Parliaj A, Kailath T. ESPRIT—a subspace rotation approach to estimation of parameters of sinusoid in noises[J]. IEEE Trans. on AES, 1986, 34(5): 1340 - 1342.
- [ 3 ] 石要武, 戴逸松, 丁宏. 有色噪声背景下正弦信号频率估计的互谱 Pisarenko 和 MUSIC 方法[J]. 电子学报, 1996, 24(10): 46 - 51.
- [ 4 ] Zhang X D, Liang Y C. Prefilter-based Esprit for estimating parameters of sinusoids in non-Gaussian noise[J]. IEEE Trans. on AES, 1995, 45(1): 349 - 353.
- [ 5 ] Swami A, Mendel J M. Cumulant-based approach to the harmonic retrieval problem[A]. Proc ICASSP-88[C]. New York, 1988. 2264 - 2267.

- [ 6 ] Ferri A, Alengrin G. Estimation of the frequencies of a complex sinusoidal noisy signal using fourth order statistics[A]. Proc ICASSP-91[C]. Toronto, Canada, 1991. 3457 - 3460.
- [ 7 ] 马彦, 石要武, 康小涛. 混合色噪声背景下谐波恢复: 一种可消除谱估计伪峰的互谱 SVD-LS 方法[J]. 电子学报, 2002, 30(1): 14 - 18.
- [ 8 ] Haykin S, Li X B. Detection of signals in chaos[J]. Processing of IEEE, 1995, 83: 94.
- [ 9 ] Leung H. System identification using chaos with application to equalization of a chaotic modulation system[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1998, 45(4): 314 - 320.
- [ 10 ] Kevin M. Short Detection of teleseismic events in seismic sensor data using nonlinear dynamic forecasting[J]. Bifurcation and Chaos, 1996, 6(2): 367 - 375.
- [ 11 ] Short K M. Unmasking a modulated chaotic communications scheme[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1997, 7: 1579.
- [ 12 ] Kennedy M K. Digital communications using chaos[J]. Signal Processing, 2000, 80: 1307 - 1320.
- [ 13 ] Guo-yu WANG, Da-jun CHEN, Jian-ya LIN, Xing CHEN. The application of chaotic oscillators to weak signal detection[J]. IEEE. Trans. on industrial electronics, 1999, 46(20): 440 - 443.
- [ 14 ] 聂春燕, 石要武. 基于互相关检测和混沌理论的弱信号检测方法研究[J]. 计量学报, 2001, 22(1): 32 - 35.
- [ 15 ] 王树和. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999. 489 - 450.
- [ 16 ] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994. 114 - 116.
- [ 17 ] 王冠宇, 陈大军, 林建亚等. Duffing 振子微弱信号检测方法的统计特性研究[J]. 电子学报, 1998, 26(1): 38 - 44.

### 作者简介:



李月女, 1958 年生于吉林省长春市, 博士. 现为吉林大学教授, 感兴趣的研究方向为微弱信号检测、混沌理论及应用研究、数字信号处理.

石要武 男, 1954 年生于吉林省长春市, 吉林大学教授, 博士生导师, 感兴趣的研究方向为微弱信号检测、数字信号处理及系统工程.